Translation of Thoughts on the Division Operation_Notes from a Reader : Swati Sircar
From Azim premji University At Right Angles_ Vol.5, No.2_July 2016

भाग की संक्रिया पर कुछ विचार

(एक पाठक के नोट्स)

स्वाती सरकार

चार बुनियादी अंकगणित संक्रियाओं में से भाग ज़ाहिर तौर पर सबसे जटिल है, और यही वह संक्रिया है जिसके साथ बच्चों को सबसे ज़्यादा दिक़्क़त होती है। इस मामले में, मैं पाठकों के साथ कुछ विचार साझा करना चाहूँगी कि भाग कैसे पढ़ाया जा सकता है। जुलाई, 2014 के अंक में पुलआउट में जिस तरह भाग को प्रस्तुत किया गया था, इन्हें उनके विकल्प के रूप में देखा जा सकता है। ख़ासतौर पर, निम्नलिखित सवालों को सम्बोधित किया गया है :

1. भाग की संक्रिया में हम बाएँ से दाएँ की ओर क्यों बढ़ते हैं, जबकि अन्य सभी संक्रियाओं में दाएँ से बाएँ की ओर बढ़ा जाता है?
2. भाग के मानक एल्गोरिदम में स्थानीय मान की क्या भूमिका है?
3. जब भाजक में दो या दो से अधिक अंक हों तब हम भागफल का अनुमान कैसे लगाते हैं?

पहले और दूसरे बिन्दु जुड़े हुए हैं। विद्यार्थियों के साथ जो तर्क मैं इस्तेमाल करती हूँ वह यह है कि यह महज़ कार्य-कुशलता का मसला है। जोड़ और घटाव के मामले में, बाएँ से दाएँ वाला एल्गोरिदम कारगर नहीं होगा, जैसा कि नीचे चित्रित है।

बाएं से दाएं

Step		T	U	
Step 1		T	U	हम आरम्भ दहाइयों को जोड़ने से करते हैं।
		5	7	
	+	3	9	
		8		
Step 2		T	U	अब हम इकाइयों को जोड़ेंगे और उनके जोड़ के इकाई अंक को और उनके जोड़ के दहाई अंक को अलग–अलग लिखेंगे।
		1		
		5	7	
	+	3	9	
		8	6	
Step 3		T	U	तो हमें एक तीसरे क़दम की जरूरत होगी जिसमें हमें दहाई के स्थान पर पहले से लिखे अंक को बदलना होगा।
		1		
		5	7	
	+	3	9	
		9	6	

दाएं से बाएं

Step		T	U	
Step 1		T	U	हम आरम्भ इकाई को जोड़ने से करते हैं उनके जोड़ के इकाई अंक को और उनके जोड़ के दहाई अंक को अलग–अलग लिखते हैं।
		1		
		5	7	
	+	3	9	
			6	
Step 2		T	U	दूसरे क़दम में हम सभी दहाई अंकों को जोड़ते हैं।
		1		
		5	7	
	+	3	9	
		9	6	
				यहां हमें उत्तर में किसी भी अंक को बदलने की ज़रूरत नहीं पड़ी।

घटाव में भी ऐसी ही परिस्थिति उभरती है। पर मामलों में विविधता को देखते हुए, मुझे सन्देह है कि क्या यह बच्चों को पढ़ाया या करके दिखाया भी जाना चाहिए या नहीं।

भाग के लिए दाएँ से बाएँ वाला एल्गोरिदम सबसे कारगर नहीं है, जैसा नीचे दर्शाया गया है।

दाएं से बाएं

Step			T	U	
Step 1			T	U	चलिए इकाई से आरम्भ करते हैं यानी 6 को 2 से भाग करते हैं।
				3	
	2	)	3	6	
				6	
Step 2			T	U	अब हम 3 दहाइयों का भाग करने की कोशिश करते हैं। हमारे पास 1 दहाई बच जाती है।
			1	3	
	2	)	3	6	
				6	
			3		
			2		
			1		

बाएं से दाएं

Step			T	U	
Step 1			T	U	हम दहाई से आरम्भ करते हैं यानी हम 3 को 2 से भाग देते हैं और हमारे पास 1 दहाई बच जाती है।
			1		
	2	)	3	6	
			2		
			1		
Step 2			T	U	अब हम इस दहाई को 10 इकाइयों में बदलते हैं और भाज्य से 6 इकाइयों को जोड़कर 16 इकाइयों को पा लेते हैं।
			1		
	2	)	3	6	
			2		
			1	6	

दाएं से बाएं					
Step 3			T	U	तो हमें इस बची हुई इकाइयों को 10 में बदलना होगा। फिर हम इन 10 इकाइयों को बांटेंगे।
			1	8	
	2	)	3	6	
				6	
			3		
			2		
			1	0	
			1	0	इसलिए हमें इकाई के अंक को 5 से बढ़ाना होगा यानी कि इसे 3 से 3+5=8 में बदलना है।

बाएं से दाएं					
Step 3			T	U	हम दहाई से आरम्भ करते हैं यानी हम 3 को 2 से भाग देते हैं और हमारे पास 1 दहाई बच जाती है। अब हम इस दहाई को 10 इकाइयों में बदलते हैं और भाज्य से 6
			1	8	
	2	)	3	6	
			2		
			1	6	
			1	6	
					इकाइयों को जोड़कर 16 इकाइयां पा लेते हैं। अब हम इन 16 इकाइयां को 2 से भाग करेंगे। यहां पर भी हमें उत्तर या भागफल में से किसी भी अंक को बदलने की जरूरत नहीं पड़ी।

[नोट : एल्गोरिदम में इकाइयों की अदला–बदली साफ़तौर पर जाहिर नहीं है। यदि शिक्षक दहाई से इकाई का रूपान्तरण सामग्री–जैसे बेस टेन ब्लॉक्स या दस की गठरी –द्वारा दर्शाएं तो विद्यार्थियों को लाभ होगा।]

यदि हम ये विद्यार्थियों को दिखाएँ या उससे भी बेहतर, उन्हें दोनों तरीक़ों – बाएँ से दाएँ और दाएँ से बाएँ – पर काम करवाएँ और प्रत्येक तरीक़े की कार्यकुशलता पर चिन्तन करवाएँ, तो उनके पास एक बेहतर समझ होगी कि आख़िर मानक एल्गोरिदम जैसे हैं, वैसे ही क्यों हैं।

http://teachersofindia.org/en/video/division-pay-attention पर मैंने 8643÷7 का उदाहरण लेकर यह दस्तावेज़ीकरण करने की कोशिश की है कि कैसे भाग के मानक एल्गोरिदम में स्थानीय मान लाया जाता है, वह भी क़दम-दर-क़दम लम्बे और छोटे तरीक़ों का साथ-साथ डेमो देकर।

जब भाग का एल्गोरिदम सिखाया जाता है, हम आमतौर पर उसका छोटा संस्करण इस्तेमाल करते हैं जो कि घटाव के उन नियमों का उल्लंघन करता है जो एक बच्चे ने सीखे हैं।

लम्बा संस्करण Longer Version						छोटा संस्करण Shorter Version					
Step 1			T	U	पूरा 20 लिखने से घटाव के नियम का उल्लघंन नहीं होता है और हम 2 इकाइयों को या 20 को घटा रहे हैं।	Step 1			T	U	20 को केवल 2 लिखना और फिर उसे 36 में से घटाने में उलझन पैदा होती है,क्योंकि बच्चों को शायद यह समझ न आए कि वे 2 दहाइयों 3 दहाइयों में से घटा रहे हैं।
			1	0					1		
	2	)	3	6			2	)	3	6	
			2	0					2		
			1	6					1		
Step 2			T	U	यहां हमें इकाई को 0 से 8 में बदलने की ज़रूरत होती है। यदि यह एरो कार्डों से दर्शाया जाता है, तो समस्या सुलझ सकती है।	Step 2			T	U	यहां हमें इकाई बदलने की ज़रूरत नहीं है। इसलिए हमने पहले क़दम में इकाई नहीं लिखी है।
			1	8					1	8	
	2	)	3	6			2	)	3	6	
			2	0					2		
			1	6					1	6	
			1	6					1	6	
				0						0	

तीसरा बिन्दु ज़रूरी है क्योंकि भाग ही वह जगह है जहाँ मानक एल्गोरिदम में अनुमान करने की ज़रूरत होती है। जोड़, घटाव और गुणा के लिए, चाहे कितनी भी बड़ी संख्याएँ हों, अनुमान की कोई आवश्यकता नहीं होती।

यह रणनीति बहुमुखी है क्योंकि सन्निकटन किसी भी दिशा में जा सकता है। तो हमें 2 अंकों वाले भाजकों से शुरुआत करनी होगी और उन्हें सबसे क़रीबी दहाई के सन्निकट करना होगा ताकि अनुमान लगाया जा सके। स्वाभाविक रूप से, यह एक अच्छा आईडिया होगा कि आम 2 अंकीय भाजकों की ओर बढ़ने से पहले, बच्चों को उन भाजकों के साथ अभ्यास करवाया जाए जो 10 के विभाज्य हैं, जैसे 40, 70 आदि। उसके बाद, यदि भाजक 62 है, तो हम उसे 60 के सन्निकट कर सकते हैं और हर क़दम के लिए भाज्य से कम, सबसे बड़े विभाज्य ढूँढ़ सकते हैं। इसी तरह, यदि भाजक 37 है, तो इसे 40 के सन्निकट करना होगा। बेशक, 5 से ख़त्म होने वाली संख्याएँ (जैसे 85) हमेशा ही थोड़ी पेचीदा होती हैं – आप 80 या 90 में से किसी का भी इस्तेमाल कर सकते हैं। यहाँ इस बात पर भी तवज्जोह दी जानी चाहिए कि प्रत्येक क़दम पर अन्तर भाजक से कम होना चाहिए। आकलन के क़दम कुछ इस प्रकार हैं :

अनुमान **के क़दम**	**उदाहरण : 256 ÷ 36**	**उदाहरण : 256 ÷ 33**
1. भाजक को 10 के सबसे क़रीबी विभाज्य से सन्निकट करें।	36 का 40 में सन्निकटन	33 का 30 में सन्निकटन
2. इस क़दम पर अनुमान का इस्तेमाल कर भागफल (या भागफल अंक) का आकलन करें।	256 ÷ 40 (या 25 ÷ 4) ≈ 6	256 ÷ 30 (या 25 ÷ 3) ≈ 8
3. भागफल अंक x असल भाजक की गणना करें।	6 × 36 = 216	8 × 33 = 264
4. चेक करें : (क) यदि भागफल अंक x भाजक > भाज्य : भागफल अंक को 1 से कम करें और तीसरा क़दम दोहराएँ। (ख) यदि नहीं, भाज्य चेक करें – भागफल अंक x भाजक > भाजक : भागफल अंक को 1 से बढ़ाएँ और तीसरा क़दम दोहराएँ। (ग) यदि भाज्य - भागफल अंक x भाजक ≤ भाजक : पाँचवे क़दम की ओर बढ़ें	चेक करें : (क) 216 < 256 (ख) 256 - 216 = 40 > 36 ⇒ भागफल = 6 + 1 = 7 7 को भागफल अंक के रूप में इस्तेमाल करते हुए तीसरे क़दम पर वापस जाएँ।	चेक करें : (क) 264 > 256 ⇒ भागफल अंक = 8 - 1 = 7 7 को भागफल अंक के रूप में इस्तेमाल करते हुए तीसरे क़दम पर वापस जाएँ।
5. (बदले हुए) भागफल के साथ भाग के क़दम को पूरा करें।	7 × 36 = 252 यानी कि, 256 ÷ 36 = 7 शेषफल 4	7 × 33 = 231 यानी कि, 256 ÷ 33 = 7 शेषफल 25

में पाठकों के सुझावों का स्वागत करती हूँ।

स्वाती सरकार स्कूल ऑफ़ कंटीन्यूइंग एजुकेशन एंड यूनिवर्सिटी रिसोर्स सेंटर, अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी में सीनियर लेक्चरर और रिसोर्स पर्सन हैं। गणित उनके जीवन का दूसरा प्यार है (पहला प्यार है ड्रॉइंग)। उन्होंने इण्डियन स्टैटिस्टिकल इंस्टिट्यूट से बी स्टैट-एम स्टैट और यूनिवर्सिटी ऑफ़ वॉशिंगटन, सीएटल से गणित में एमएस किया है। वे बच्चों व शिक्षकों के

साथ पाँच वर्षों से भी अधिक समय से गणित के क्षेत्र में काम कर रही हैं। उन्हें कुछ भी करके देखना, ख़ासतौर पर ओरिगामी बेहद दिलचस्प लगता है। उनसे swati.sircar@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : अतुल वाधवानी **अनुवाद पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी-एडिटर :** अनुज उपाध्याय (सभी एकलव्य फ़ाउण्डेशन) **सम्पादन :** राजेश उत्साही